

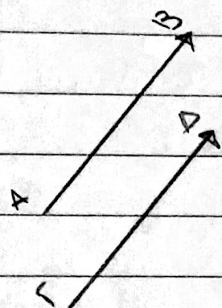
1)

Να δείξουμε ότι το καρτεσιανό ματέριο είναι και "κανονικό" για την Ευκλείδεια Γεωμετρία.

Ας υποθέσουμε ότι E^3 είναι ένας χώρος όπου έχουν οριστεί οι έννοιες των Hilbert για την Γεωμετρία και ισχύουν όλα τα αξιώματα.

Στο προηγούμενο μάθημα ορίσαμε τα (ελεύθερα) διανύσματα

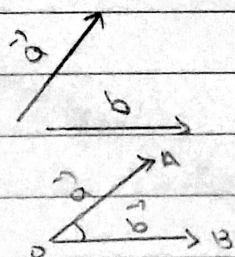
θεωρήσαμε το σύνολο V_3 όλων των παρανομοζωμένων και ορίσαμε μια σχέση ισοτιμίας μεταξύ παρανομοζωμένων.



Δύο διάνττα $\vec{AB}$, $\vec{CD}$ είναι ίσα αν:

- ίδια μήκος
- ίδια διεύθυνση
- ίδια φορά

Γωνία διανυσμάτων $\vec{a}$, $\vec{b}$ ορίζεται ως εξής:

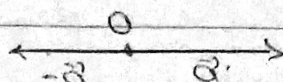


Φέρνουμε τα διάνττα ώστε να έχουν κοινή αρχή και ανακρίσσουμε γωνία. την κυρή γωνία των ημιευθειών που ορίζονται από τα $\vec{OA}$ και $\vec{OB}$

Ο αριθμός αυτός δεν εξαρτάται από την επιλογή της αρχής

Είδαμε επίσης τι συμβαίνει δύο διάνττα να είναι ομόρροπα και αντιρροπα.

Ορίζουμε και το αντίθετο $-\vec{a}$ ενός διανυσματος $\vec{a}$



2.)

Δύο διανύσματα λέγονται κόθεται όταν η μεταξύ τους γωνία είναι $\pi/2$

Ο χώρος V_3 δέχεται και άλλες δομές όπως πρόσθεση και βαθμιαία πολλαπλασιασμός

Πρόθεση: Ας θεωρήσουμε δύο διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ παίρνοντας ένα σημείο O και σημεία A και B ώστε:

$$\vec{OA} = \vec{a} \quad \text{και} \quad \vec{AB} = \vec{b} \quad \rightarrow \quad \vec{a} + \vec{b} = \vec{OB}$$

Δεν είναι δύσκολο να αποδειχθεί ότι ο αριθμός δεν εξαρτάται από την επιλογή του σημείου O .

Πρόταση: Το σύνολο V_3 των ελεύθερων διανυσμάτων με πράξη την πρόσθεση γίνεται Αβελιανή Ομάδα:

- i.) $\exists$ το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0} (= \vec{AA})$
- ii.) $\vec{0} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$
- iii.) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- iv.) $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

Βαθμιαίος πολλαπλασιασμός

Θα λέμε γινόμενο του $\lambda \in \mathbb{R}$ με ένα διάνυσμα $\vec{a} \in V_3$ και θα συμβολίζουμε με $\underline{\lambda \vec{a}}$, το διάνυσμα με τις εξής ιδιότητες:

- i.) Για $\lambda = 0$: $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$
- ii.) Για $\lambda \neq 0$: διάνυσμα $\lambda \vec{a}$ έχει:
 - Μήκος το $|\lambda| \cdot \|\vec{a}\|$
 - Διεύθυνση του $\vec{a}$
 - Φορά του $\vec{a}$ αν $\lambda > 0$ και φορά του $-\vec{a}$ αν $\lambda < 0$.

Σημείωση: Ο τρόπος που ορίστηκε τον βαθμωτό γινόμενο δεν εφαρμόζεται από την επιλογή του ορίσμου α.

Πρόταση: Το γινόμενο πληρεί τις ιδιότητες

$$i.) \lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$$

$$ii.) (\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$$

$$iii.) (\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a})$$

$$iv.) 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$$

Θεώρημα: Το ευκλείδειο $(V_3, +, \cdot)$ με τις πράξεις της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού έχει την δομή του διανυσματικού χώρου.

Πο να δείξουμε ότι ο χώρος V_3 είναι "ισόμορφος" με τον $\mathbb{R}^3$ ορκει υ.δ.ο έχει διάσταση 3.

Από την Γραμμική Άλγεβρα.

① Ένα ευκλείδειο διανυσματικών $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_r$ λέγονται Γ.Α. αν από την σχέση $\lambda_1\vec{a}_1 + \dots + \lambda_r\vec{a}_r = \vec{0}$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_r = 0$. Διαφορετικά τα διάνττα λέγονται εξαρτημένα.

② Θα λέμε ότι το ευκλείδειο $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_r\}$ αποτελεί βάση ενός διάνττου χώρου W όταν:

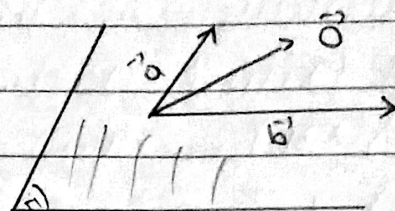
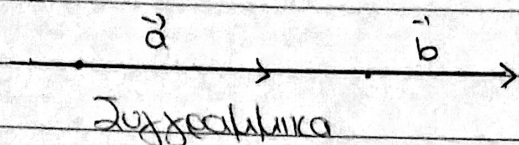
- Τα διάνττα $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_r\}$ παραχάν τον χώρο δηλαδή κάθε $\vec{x} \in W$ γραφεται ως: $\vec{x} = \lambda_1\vec{a}_1 + \dots + \lambda_r\vec{a}_r$
- Τα διάνττα $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_r\}$ είναι Γ.Α.

Je αυτην την περίπτωση λέμε ότι η διάσταση του W είναι r .

(4)

Ορισμός: Δύο ή περισσότερα διανύσματα λέγονται συγγραμμικά αν έχουν την ίδια διεύθυνση.

Τρία ή περισσότερα διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ λέγονται συνεπίπεδα αν μεταφέροντας τα ώστε να έχουν κοινή αρχή O , βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο.



Σημείωση:

i.) Το μηδενικό διάνυσμα θεωρείται συγγραμμικό με κάθε διάνυσμα του $\mathbb{R}^3$

ii.) Δύο μη συγγραμμικά διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ είναι συνεπίπεδα.

Πρόταση: Δύο διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ είναι γραμμικά εξαρτημένα αν και μόνο αν είναι συγγραμμικά

Απόδειξη:

[$\Rightarrow$] Ας υποθέσουμε πρώτα ότι $\vec{a}, \vec{b}$ είναι Γ.Ε. Τότε υπάρχουν δύο αριθμοί λ και μ όχι και οι δύο μηδεν. έτσι ώστε:

$$\lambda \vec{a} + \mu \vec{b} = \vec{0}$$

• Εάν $\lambda \neq 0$: $\vec{a} = -(\frac{\mu}{\lambda}) \vec{b}$

$\Rightarrow \vec{a}, \vec{b}$ έχουν ίδια διεύθυνση $\Rightarrow$ συγγραμμικά

• Εάν $\mu \neq 0$: $\vec{b} = -(\frac{\lambda}{\mu}) \vec{a}$

$\Rightarrow \vec{a}, \vec{b}$ συγγραμμικά

[$\Leftarrow$] Εάν κάποιο από τα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ είναι μηδεν δεν έχουμε να αποδείξουμε κάτι. Οπότε ας υποθέσουμε ότι $\vec{a}, \vec{b}$ μη μηδενικά, δηλαδή $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$. Επειδή $\vec{a}, \vec{b}$ συγγραμμικά υπάρχει αριθμός k ώστε : $\vec{a} = k \vec{b}$

$$\Rightarrow \perp \cdot \vec{a} - \perp \cdot \vec{b} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{a}, \vec{b} \text{ Γ.Ε.}$$

Πρόταση: Τρία διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ του $\mathbb{R}^3$ είναι Γ.Ε. αν και μόνο αν είναι συνεπίπεδα.

Απόδειξη:

[$\Rightarrow$] Ας υποθέσουμε πρώτα ότι $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ Γ.Ε.. Τότε υπάρχουν αριθμοί λ, μ, κ όχι όλοι μηδέν έτσι ώστε

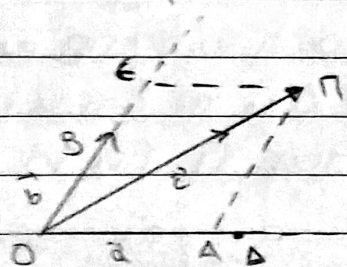
$$\lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \kappa \vec{c} = \vec{0}$$

χωρίς βλάβη της γενικότητας ας υποθέσουμε $\lambda \neq 0$:

$$\vec{a} = -\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)\vec{b} - \left(\frac{\kappa}{\lambda}\right)\vec{c}$$

Επομένως, το $\vec{a}$ είναι συνεπίπεδο με τα $\vec{b}$ και $\vec{c}$.

[$\Leftarrow$] Ας υποθέσουμε ότι $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ είναι συνεπίπεδα. Αρκεί να εξετάσουμε την περίπτωση κατά την οποία τα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ δεν είναι μηδενικά και ομα δύο μη συγγραμμικά.



Μεταφέρουμε τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ώστε να έχουν κοινή αρχή O , δηλαδή $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$.

Από το σημείο C φέρουμε παράλληλες προς τον άξονα των $\vec{a}$ και $\vec{b}$. Συμβολίζουμε με Δ, ϵ τα σημεία τέσης

$$\vec{c} = \vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AD} = \lambda \vec{a} + \vec{OE} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$$

$$\Rightarrow \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + (-1) \vec{c} = \vec{0}$$

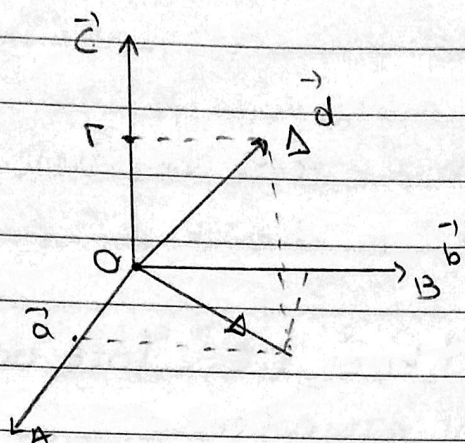
$$\Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ Γ.Ε.}$$

Πρόταση: Τέσσερα οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ και $\vec{d}$ του $\mathbb{R}^3$ είναι πάντα Γ.Ε.

Απόδειξη. Αρκεί να εξετάσουμε την περίπτωση κατά την οποία τα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ είναι μη μηδενικά, ομα δύο μη συγγραμμικά και ομα τρία μη συνεπίπεδα.

(16)

Τα μεταφέρουμε όλα τα διάνττα σε κοινή αρχή (όπως στο σχήμα)



Από το σημείο Δ φέρνουμε ευθεία παρλλη. προς του φορέα του $\vec{c}$ που τέμνει το επίπεδο $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ στο Ε.

$$\begin{aligned}\text{Τότε θα έχουμε: } \vec{d} &= \vec{OA} = \vec{OE} + \vec{ED} \\ &= \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \kappa \vec{c}\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \kappa \vec{c} + (-1) \vec{d} = \vec{0}$$

$\Rightarrow$ υπερπέρασμα

Συμπέρασμα: Δεν μπορεί η διαστάση του $\mathbb{R}^3$ να είναι μεγαλύτερη του 3. Άρα ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^3$ έχει διαστάση 3.

Ας θεωρήσουμε στον χώρο $\mathbb{R}^3$ ένα τυχαίο σημείο O και θεωρούμε ότι από το O αρχίζουν όλα τα διανύσματα του $\mathbb{R}^3$. Έστω $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ τυχαία βάση του $\mathbb{R}^3$. Για κάθε σημείο $P \in \mathbb{R}^3$ το διάνυσμα $\vec{OP}$.

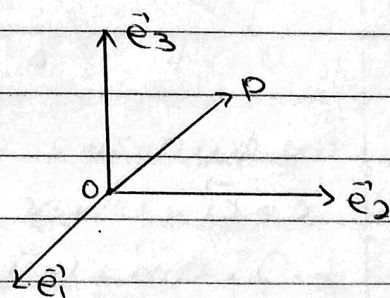
Ονομάζεται διάνυσμα θέσης του P ως προς το O. και

$$\vec{OP} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3$$

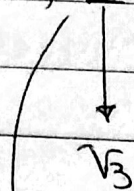
όπου $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$.

Οι αριθμοί x_1, x_2, x_3 λέγονται:

συντεταγμένες του P ως προς την βάση $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$



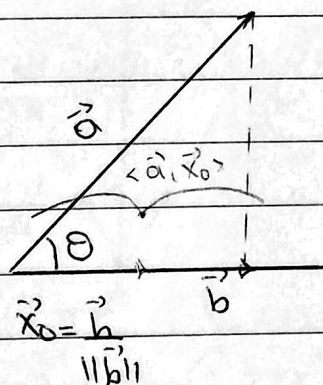
Παρατήρηση:

1.) $\mathbb{E}^3$ (χώρος με αξιωματικά Hilbert) V_3 (χώρος των ελευθ. διωνυμύσεων. Είδαμε V_3 σαν χώρο διαστ. 3).

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

Αυτό δείχνει μοναδικότητα του καρτεσιανού μετρώλου για την Ευκ. Γεωμ. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει "1-1" αντιστοιχία από το $\mathbb{E}^3$ η οποία μεταφέρει έννοιες όπως ευθεία - επίπεδο όπως ορίσαμε στο $\mathbb{R}^3$

2.) Υπάρχει "γεωμετρικός τρόπος" να ορίσουμε εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{E}^3$ Θα μπορούσαμε να ορίσουμε εσωτερικό γινόμενο δυο διανυσμάτων $\vec{a}, \vec{b}$ στο $\mathbb{E}^3$ ως τον αριθμό $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos \theta$ όπου θ η γωνία των $\vec{a}, \vec{b}$



Ο λόγος που ορίζουμε έτσι το εσωτερικό γινόμενο είναι διότι η απόλυτη τιμή του εσωτερικού γιν. του $\vec{a}$ με το μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{x}_0 = \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}$ είναι το μήκος της

προβολής του $\vec{a}$ στην ευθεία πάνω στην οποία διέρχεται το $\vec{b}$. Δηλαδή.

$$P_{\vec{b}}(\vec{a}) = \left\{ \|\vec{a}\| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) \right\} \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|} = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}$$

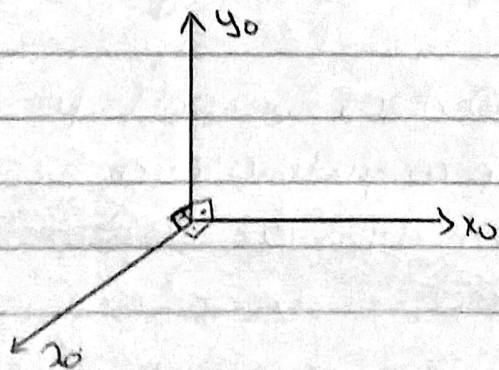
β) Από εδώ και στο εξής θα δουλεύουμε μόνο με το καρτεσιανό μοντέλο. Παρατηρούμε ότι αν $P_1(x_1, x_2, x_3)$, $P_2(y_1, y_2, y_3)$ είναι σημεία του $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{P_1 P_2} = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, y_3 - x_3)$$

Αφού είχαμε το τετράπλο διάνυσμα $\leftrightarrow$ τριάδες με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να ορίσουμε εξωτερικό γινόμενο ελεύθερων διατάκων

4.) Υπάρχουν πολλά συστήματα συντεταγμένων και αυτό οφείδεται στο γεγονός ότι υπάρχουν πολλές βάσεις. Θα θεωρήσουμε ορθογώνια δεξιόστροφα συστήματα δηλαδή:

• Το σύστημα $\{\vec{0}; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0\}$ λέγεται ορθογώνιο όταν $\langle \vec{x}_0, \vec{y}_0 \rangle = \langle \vec{y}_0, \vec{z}_0 \rangle = \langle \vec{z}_0, \vec{x}_0 \rangle = 1$ και αυτά ανά δυο είναι κάθετα.



• Δεξιόστροφο σημαίνει ότι

$$\langle \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0 \rangle = 1$$

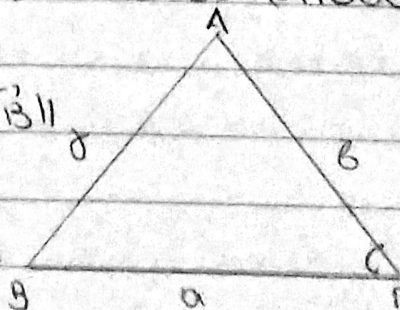
Παράδειγμα: Έστω $\triangle ABC$ και ας θεωρήσουμε ως αρχή το Γ . Τότε:

$$\begin{aligned} \gamma^2 &= \|\vec{BA}\|^2 = \|\vec{B\Gamma} + \vec{\Gamma A}\|^2 = \|\vec{\Gamma A} - \vec{\Gamma B}\|^2 \\ &= \|\vec{\Gamma A}\|^2 - 2\langle \vec{\Gamma A}, \vec{\Gamma B} \rangle + \|\vec{\Gamma B}\|^2 = \end{aligned}$$

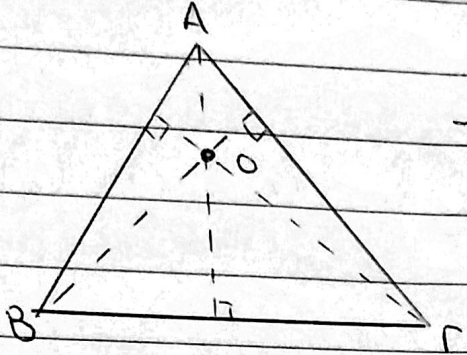
$$b^2 - 2\|\vec{\Gamma A}\|\|\vec{\Gamma B}\|\cos \hat{\Gamma} + a^2 =$$

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{\Gamma} =$$

$$\gamma^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{\Gamma}$$



Παράδειγμα: Τα ύψη ενός τριγώνου τέμνονται
σε κοινό σημείο



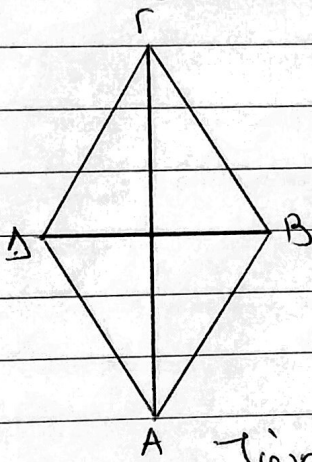
Έστω O το κοινό σημείο τομής
των υψών από τις κορυφές A
και B . Αρκεί να αποδείξουμε ότι:
 $\vec{OG} \perp \vec{AB}$. Από υπόθεση έχουμε:
 $\vec{O} = \langle \vec{OA}, \vec{BG} \rangle = \langle \vec{OA}, \vec{OG} - \vec{OB} \rangle$
 $\Rightarrow \boxed{\langle \vec{OA}, \vec{OG} \rangle = \langle \vec{OA}, \vec{OB} \rangle} \quad (1)$

Ομοίως από υπόθεση:

$$\vec{O} = \langle \vec{OB}, \vec{AG} \rangle = \langle \vec{OB}, \vec{OG} - \vec{OA} \rangle = \boxed{\langle \vec{OB}, \vec{OG} \rangle = \langle \vec{OB}, \vec{OA} \rangle} \quad (2)$$

(1) & (2) : $\vec{O} = \langle \vec{OA} - \vec{OB}, \vec{OG} \rangle = \langle \vec{BA}, \vec{OG} \rangle$ που είναι ακριβώς
αυτό που θέλαμε. $\square$

Παράδειγμα:



Οι διαγώνιοι ρομβού τέμνονται κάθετα.
Αρκεί να αποδείξουμε ότι
 $\langle \vec{AG}, \vec{BD} \rangle = 0$. Από την υπόθεση έχουμε
ότι:

- $\vec{AB} = \vec{DC}$
- $\vec{AD} = \vec{BC}$
- $\|\vec{AB}\| = \|\vec{BC}\| = \|\vec{AD}\| = \|\vec{DC}\|$

Τώρα, $\vec{AG} = \vec{AD} + \vec{DG}$

$$\vec{DB} = \vec{AB} - \vec{AD}$$

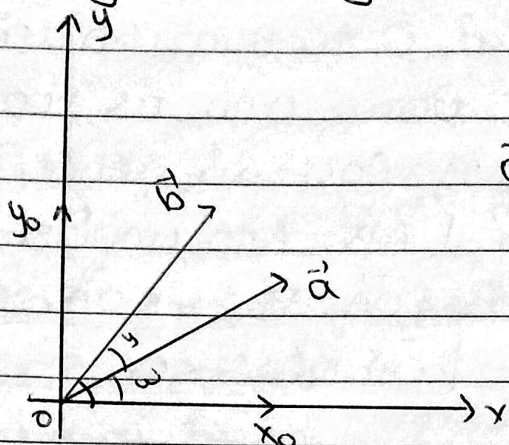
$$\langle \vec{AG}, \vec{DB} \rangle = \langle \vec{AD} + \vec{DG}, \vec{AB} - \vec{AD} \rangle = \langle \vec{AD} + \vec{AB}, \vec{AB} - \vec{AD} \rangle =$$

$$\|\vec{AD}\|^2 - \|\vec{AB}\|^2 = 0$$

10)

Παράδειγμα: Θα αποδείξουμε ότι:

$$\cos(y-w) = \cos y \cos w + \sin y \sin w$$



Θεωρούμε μοναδιαία διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ που σχηματίζουν με τα x -όξονα γωνίες w και y αντίστοιχα. Τότε:

$$\vec{a} = (\cos w, \sin w, 0)$$

$$\vec{b} = (\cos y, \sin y, 0)$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \cos w \cdot \cos y + \sin w \cdot \sin y$$

$$\parallel \vec{a} \parallel \parallel \vec{b} \parallel \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$$

$$\cos(y-w)$$

$$\Rightarrow \cos(y-w) = \cos y \cdot \cos w + \sin y \cdot \sin w$$